

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2021

ΘΕΜΑ 1

Μια κανονική επιφάνεια είναι τμήμα επιπέδου αν:

- Η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα είναι παντού ίσες με μηδέν
- Η μέση καμπυλότητα είναι σταθερή
- Η καμπυλότητα Gauss είναι σταθερή
- Όλα τα σημεία είναι ισόπεδα
- Οι κύριες καμπυλότητες είναι ίσες παντού
- Όλα τα σημεία της είναι ομφαλικά

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η κανονική επιφάνεια $S: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, όπου a, b είναι θετικές σταθερές. Ποιες από τις ακόλουθες απεικονίσεις ορίζουν σύστημα συντεταγμένων της S ;

- Άλλο
- $X(x, y) = (x, y, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})$
- $X(u, v) = (a \cosh v, b \sinh v, bu)$
- $X(u, v) = (b \cos u, a \sin u, v)$
- $X(u, v) = (a \cosh u, b \sinh u, v)$
- $X(u, v) = (a \cos v, b \sin v, u)$
- $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$
- $X(u, v) = (a \cos u, b \sin u, v)$
- $X(u, v) = (\cosh u, \sinh u, v)$

ΘΕΜΑ 3 (Υποχρεωτική ερώτηση)

Ποιες από τις ακόλουθες επιφάνειες δεν είναι αναπτυκτές;

- $S: z = x^2 - y^2$

- $S: z = x^2 + y^2$
- $S: x^2 + y^2 = 5$
- $S: x^2 + y^2 + z^2 = 3$
- $S: 2x + 3y - 9z = 1$
- $S: y^2 + z^2 = x^2$

ΘΕΜΑ 4 (Υποχρεωτική ερώτηση)

Δίνεται η κανονική επιφάνεια $S: x^2 + z^2 = 4$. Οι κύριες καμπυλότητες της μπορεί να είναι:

- $k_1 = 1/2$ και $k_2 = 0$
- $k_1 = 0$ και $k_2 = 1/2$
- Άλλο
- $k_1 = 0$ και $k_2 = -1/2$
- $k_1 = 0 = k_2$
- $k_1 = -1/2$ και $k_2 = -1/2$
- $k_1 = k_2 = 1/2$

ΘΕΜΑ 5 (Υποχρεωτική ερώτηση)

Έστω c καμπύλη του R^3 με φυσική παράμετρο $s \in I$, καμπυλότητα $k(s)$ και πλαίσιο

Frenet $\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)$. Αν για κάθε $s \in I$ ισχύει $\ddot{\vec{n}} = (1 - k(s))\vec{t}(s) - 4\vec{n}(s)$, τότε:

- Η c είναι επίπεδη
- Η c είναι καμπύλη σταθεράς κλίσης
- Η c είναι κυλινδρική έλικα
- Η c είναι κύκλος
- Δεν υπάρχει τέτοια καμπύλη
- Η c είναι σφαιρική
- Η c είναι έλλειψη

ΘΕΜΑ 6

Αν η καμπύλη $c: R \rightarrow R^3$ με $c(t) = (t, t^2, f(t))$ είναι επίπεδη, τότε αναγκαστικά η λεία συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ πληροί:

- $f(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- Άλλο
- Δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση
- $f(t) = a \cos t + b \sin t + c \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- $f'''(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- $f(t) = at^2 + bt + c \quad \forall t \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ 7

Έστω c καμπύλη του \mathbb{R}^3 με φυσική παράμετρο s και δεύτερο κάθετο $\vec{b}(s)$. Αν η παραμετρική επιφάνεια $X(s, v) = c(s) + v\vec{b}(s)$ είναι αναπτυκτική, τότε ποια από τα ακόλουθα ισχύουν:

- Η καμπύλη c είναι επίπεδη
- Δεν υπάρχει τέτοια καμπύλη
- Η επιφάνεια X δεν είναι ισομετρική με σφαίρα
- Η καμπύλη c είναι σφαιρική
- Η επιφάνεια X είναι κυλινδρική
- Η καμπύλη c είναι έλλειψη
- Η επιφάνεια X είναι κωνική
- Η επιφάνεια X είναι τμήμα σφαίρας

ΘΕΜΑ 8 (Υποχρεωτική ερώτηση)

Ποιες από τις ακόλουθες επιφάνειες δεν είναι ευθιογενείς:

- $S : X(u, v) = (u, \sin v + u \cos v, \cos v - u \sin v)$
- Επιφάνειες με καμπυλότητα Gauss $K=7$
- $S : z = x^2 - y^2$
- $S : z = e^x + e^y$
- $S : x^2 + y^2 + z^2 = 5$
- Το μονόχωνο υπερβολοειδές
- $S : y^2 + z^2 - 4 = 0$

ΘΕΜΑ 9 (Υποχρεωτική ερώτηση)

Έστω σφαιρική καμπύλη c με σταθερή καμπυλότητα. Ποια από τα ακόλουθα δεν ισχύουν;

- Η c είναι επίπεδη
- Η c είναι κύκλος
- Η c είναι καμπύλη σταθεράς κλίσης
- Η c έχει σταθερή στρέψη
- Η c είναι κυλινδρική έλικα

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται η κανονική επιφάνεια $S : z = \log x + y$. Ποια από τα ακόλουθα ισχύουν;

- Η απεικόνιση Gauss της S είναι 1-1
- Η S είναι κωνική επιφάνεια
- Η εικόνα της απεικόνισης Gauss της S περιέχεται σε επίπεδο
- Η εικόνα της απεικόνισης Gauss της S αποτελείται από μόνο ένα σημείο
- Η εικόνα της απεικόνισης Gauss της S είναι κύκλος
- Η S είναι τοπικά ισομετρική με σφαίρα
- Η S είναι κυλινδρική επιφάνεια